$\Phi =$

$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial}(V_0 + E_0 x)\hat{j}$

$= -E_0 \hat{j}$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
DEPARTAMENTO DE FISICA
CURSO: **FS2211-A** (Sep-Dic/2005)

Segundo Parcial 30 %

4 de Noviembre de 2005

NOMBRE: JUAN GUERRERO CARNET: 04-37084 NOTA: /30

1. Dos partículas de carga positiva $q_1 = q_2 = +Q$ están localizadas (fijas) sobre el eje z, en las posiciones $(0, 0, +a)$ y $(0, 0, -a)$, respectivamente. Una tercera partícula, cuya carga es $q_3 = -Q/2$, se encuentra en una posición $(0, y, 0)$ en la cual la energía electrostática total del sistema es cero. Las posiciones están expresadas coordenadas cartesianas y en metros.

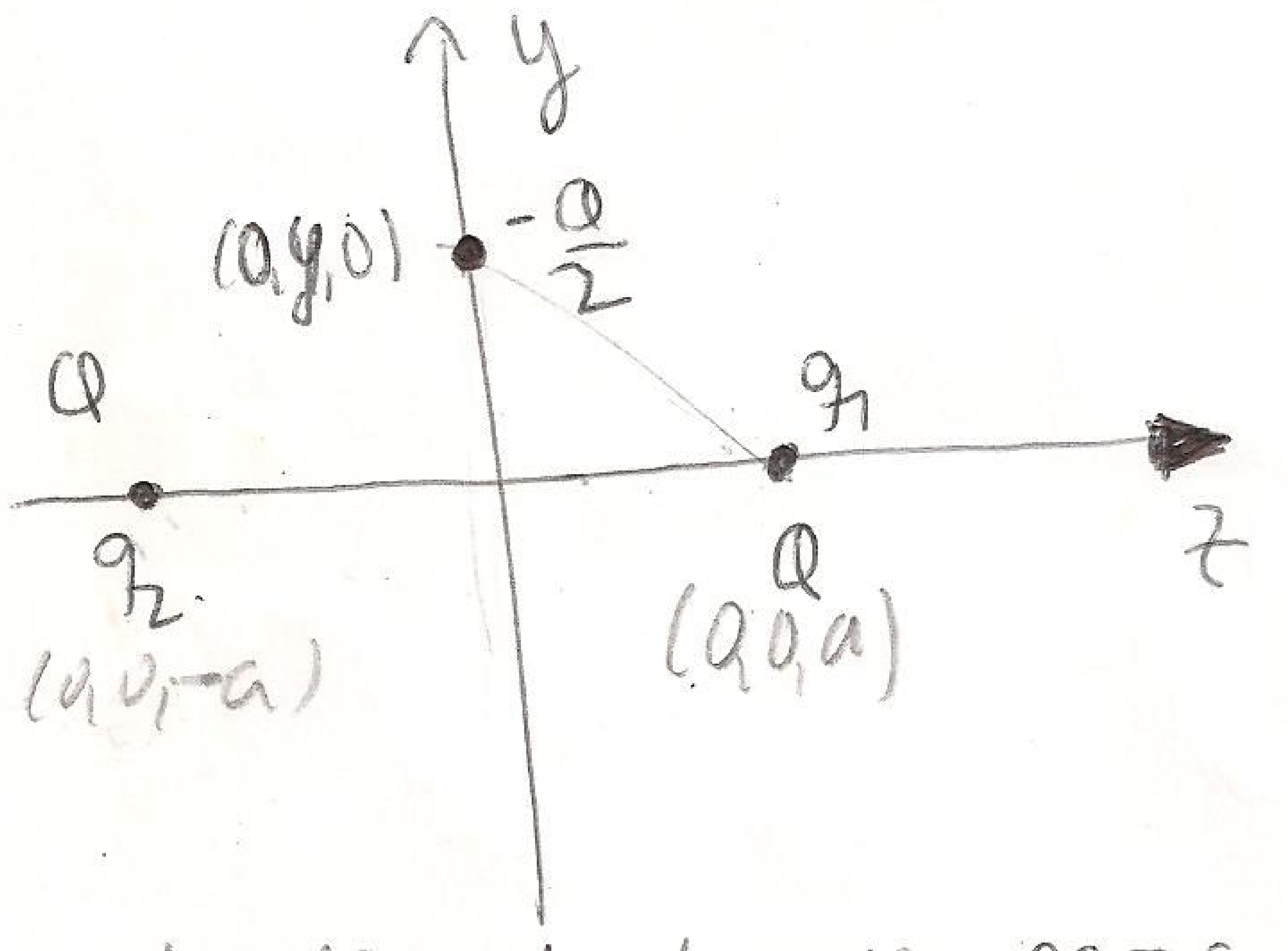
?

(a) Calcule el vector posición $(0, y, 0)$ de la tercera partícula. (3*pts.*)

ambiguo

(b) La tercera partícula, cuya masa es m_o, se deja libre desde la posición calculada en (a). Calcule su rapidez cuando pasa por el origen de coordenadas, $(0, 0, 0)$. (3*pts.*)

Sol



(a) y $\hat{j}$

(a) El potencial de una carga puntual es

$$V = \frac{kq}{\sqrt{a^2+y^2}} + \frac{kq}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{2kq}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

2. Un cilindro aislante macizo, muy largo y de radio a, se encuentra rodeado por un cilindro conductor, de radio interno a y radio externo $2a$ (Figura 1). La densidad volumétrica de carga en el cilindro macizo es ρ_o, uniforme.

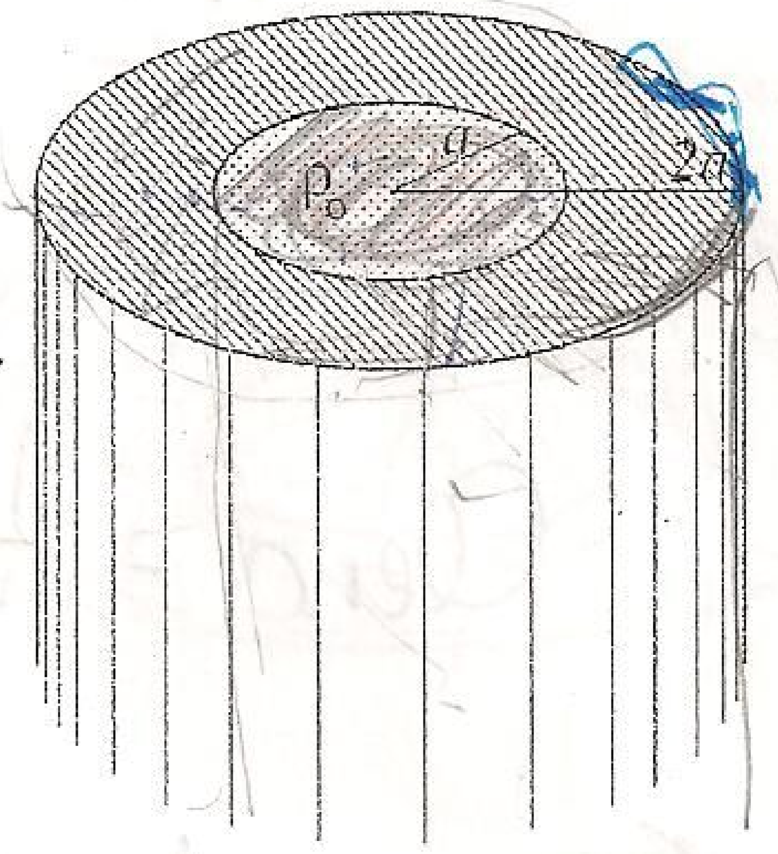


Figura 1: Problema 2.

(a) Calcule el campo electrostático en las regiones I ($r < a$) y III ($r > 2a$). ¿Cuánto vale el campo en la región II ($a < r < 2a$)? (*4pts.*)

(b) Calcule las densidades de carga, $\sigma(a)$ y $\sigma(2a)$, inducidas en las superficies $r = a$ y $r = 2a$ del conductor. (*4pts.*)

(c) Calcule el potencial electrostático en las regiones I ($r < a$), II ($a < r < 2a$) y III ($r < 2a$). El potencial del cilindro conductor es <u>cero</u> . (*4pts.*)

(a) Ley de Gauss

Región ($r<a$) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$, $\vec{E} = E_r \hat{r}$

visto desde arriba $d\vec{S} = dS\,\hat{r}$

$\oint E\,dS = \dfrac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow E\oint dS = \dfrac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

diferencial de superficie

$E\cdot 2\pi r h = \dfrac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$ área de la sup. Gaussiana

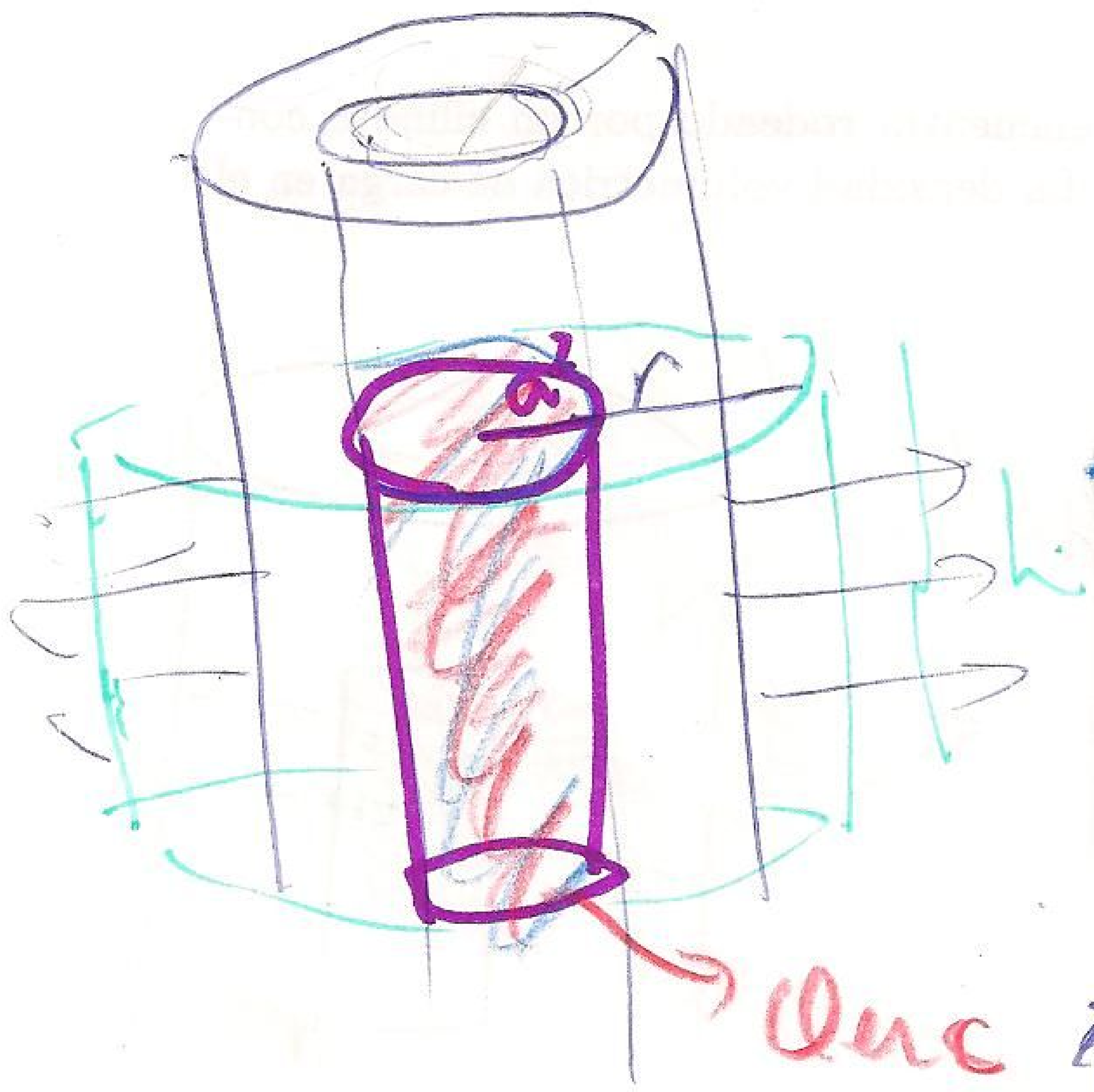
h $2\pi h$

$\rho_0 = \dfrac{Q}{V}$ $E\cdot 2\pi r = \rho_0 \pi r^2$

$E = \dfrac{\rho_0 r}{2}$

$Q_{enc} = \rho_0 V_{enc} = \rho_0(\pi r^2 h)$

III región $(r>2a)$



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot \underbrace{2\pi r h}_{\text{area gaussiana}} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\rho = \frac{Q}{V} \rightarrow \boxed{Q = \rho V}$$

$$Q_{enc} = \rho_0 \cdot \pi a^2 h$$

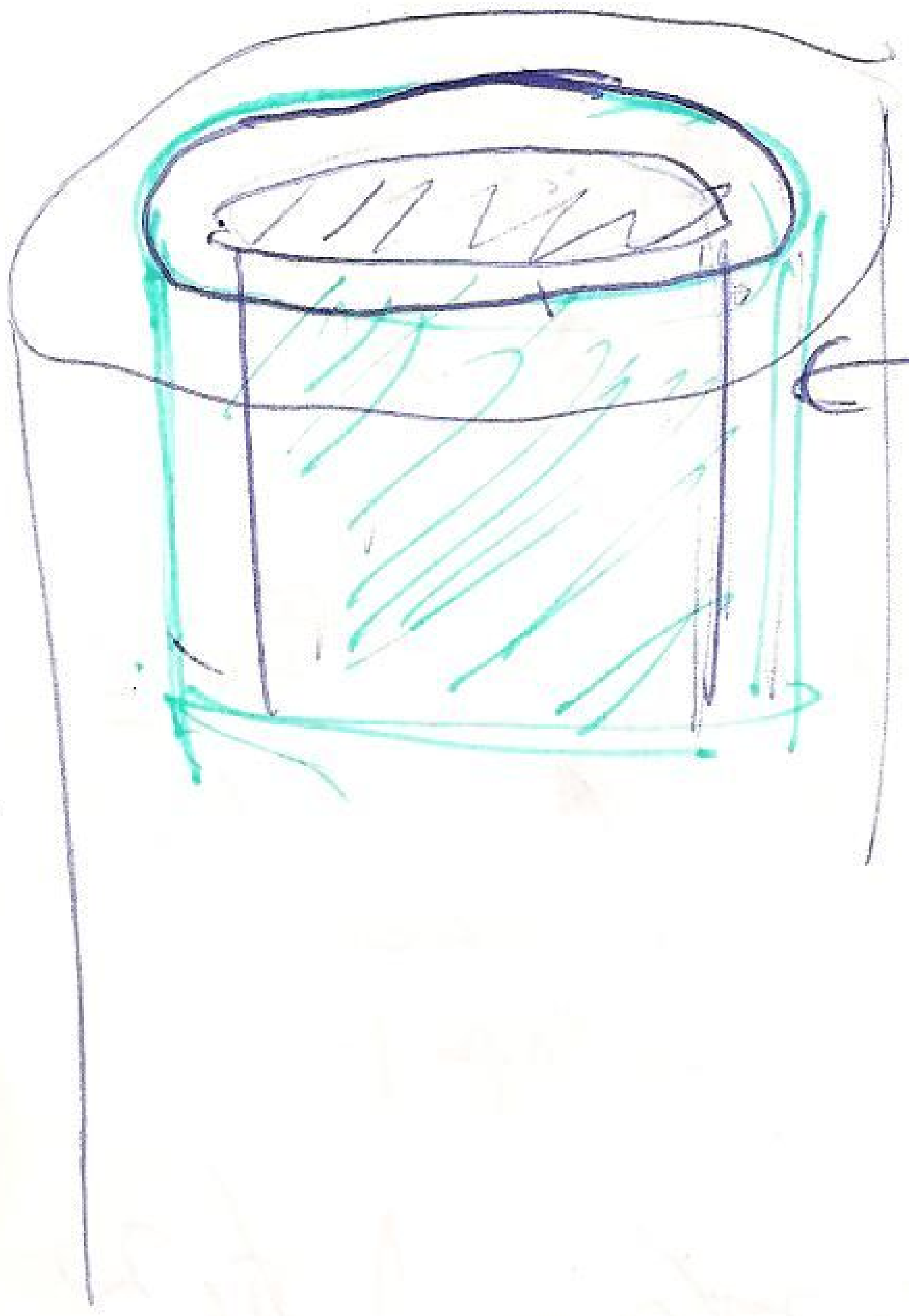
volumen donde hay carga

$$E = \frac{\rho_0 \pi a^2 h}{2\pi r h \epsilon_0} = \frac{\rho_0 a^2}{2r}$$

II región $(a<r<2a)$

$\boxed{\vec{E}=0}$ Porque es un conductor

2°.



sup. Gaussiana con $a<r<2a$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow Q_{enc} = 0$$

Carga en aislante

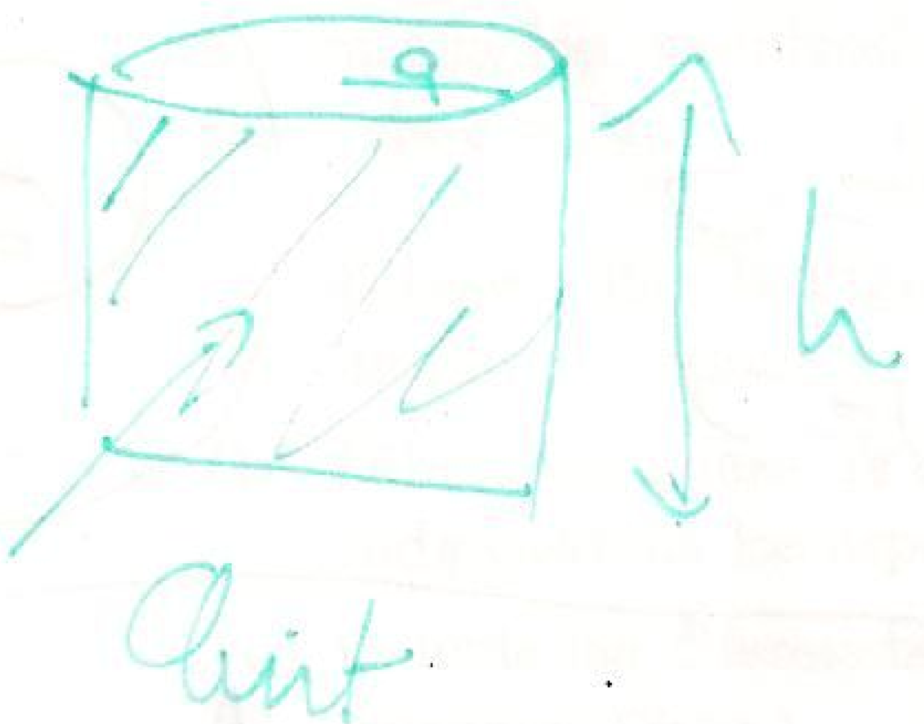
Carga en sup. int del conductor

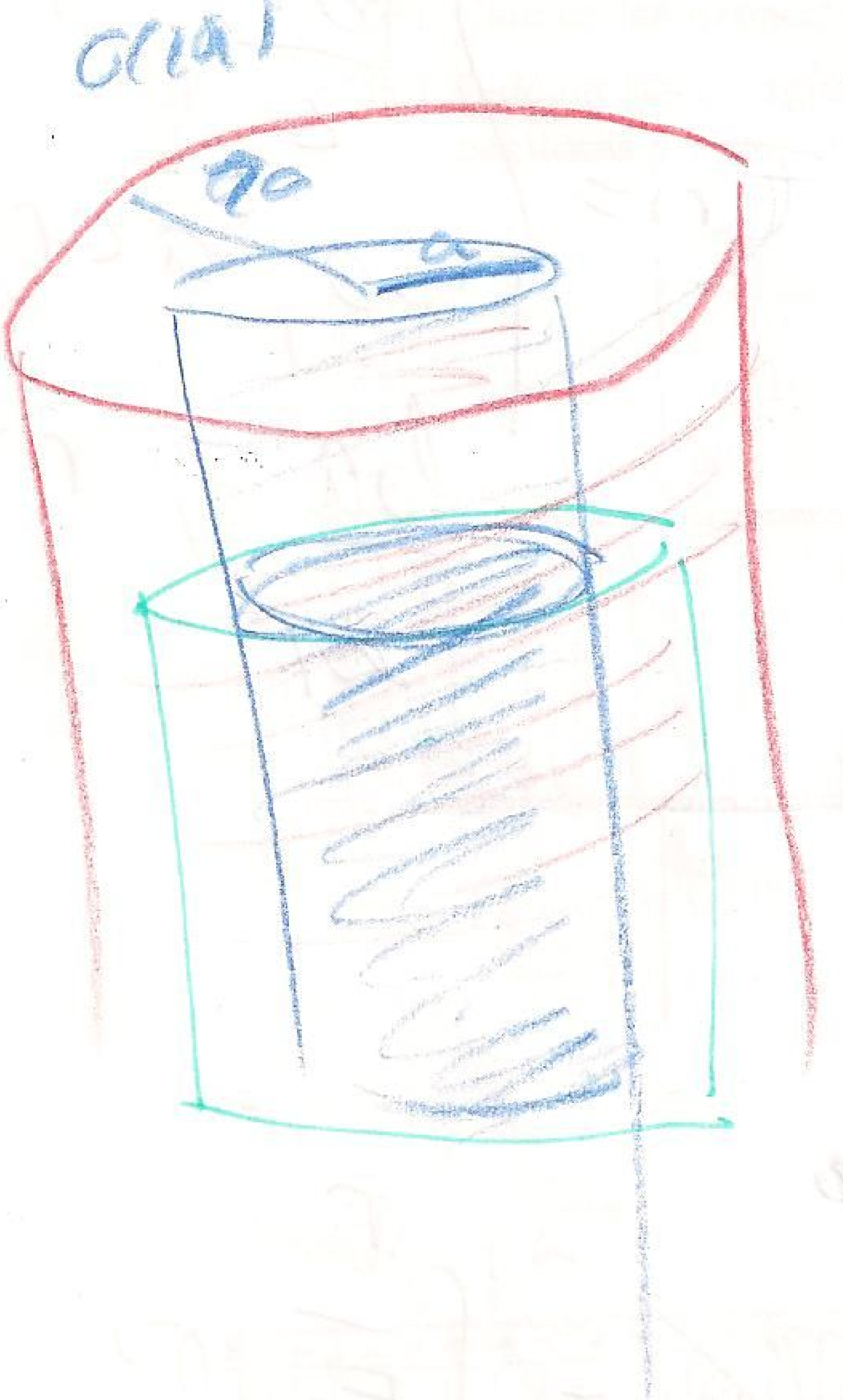
$$Q_{ais.} + Q_{int} = 0$$

$$Q_{int} = -Q_{ais} = -\rho_0 \pi a^2 h$$

carga en

$$\Rightarrow \sigma(a) = \frac{Q_{int}}{Area} = -\frac{\rho_0 \pi a^2 h}{2\pi a h} = -\frac{\rho_0 \pi a^{2}}{2\pi a} = -\frac{\rho_0 a^2}{2}$$

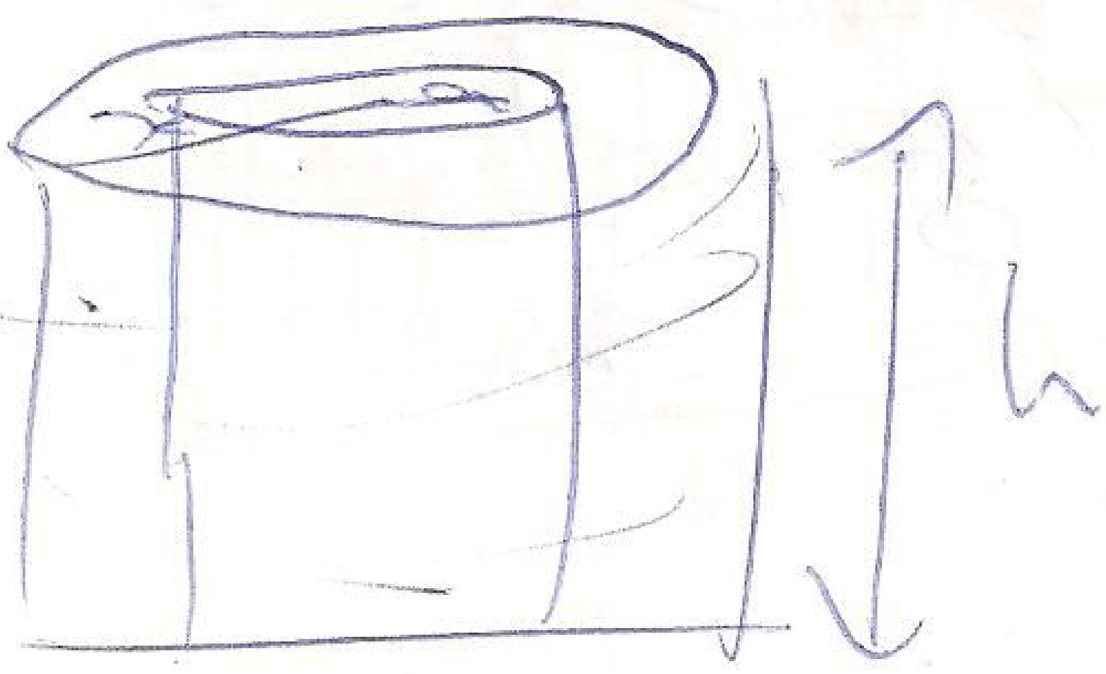




El conductor tiene carga neta cero $\Rightarrow$

$$Q_N = Q_{int} + Q_{ext} = 0$$

$$\boxed{Q_{ext} = -Q_{int}}$$



$$\underbrace{Area}_{ext} \cdot \sigma(2a) = -\sigma(a) \cdot Area_{inte}$$

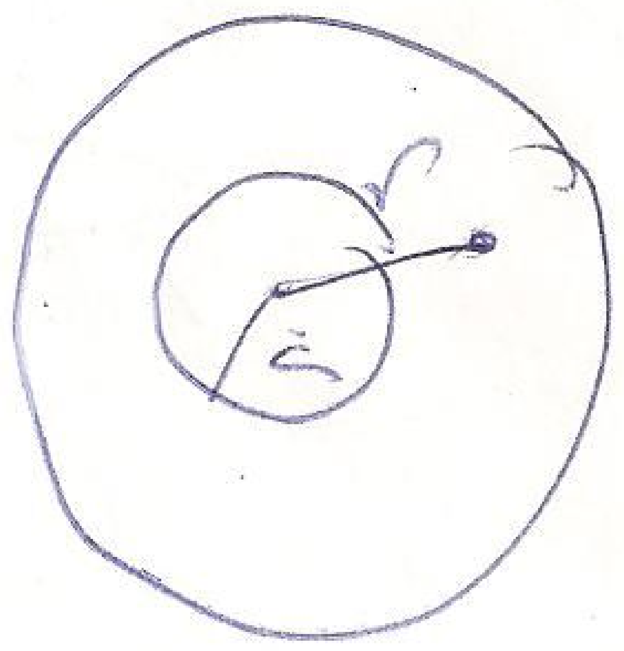
$$2\pi(2a)h \cdot \sigma(2a) = -\sigma(a)\, 2\pi a h$$

$$\sigma(2a) = -\frac{\sigma(a)}{2}$$

$$= +\frac{\rho_0 a}{4}$$

Potencial

$$\boxed{V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$



- $V(r) = 0, \; a < r < 2a$, $\quad V(a) = 0$, $\; V(2a) = 0$

Región II

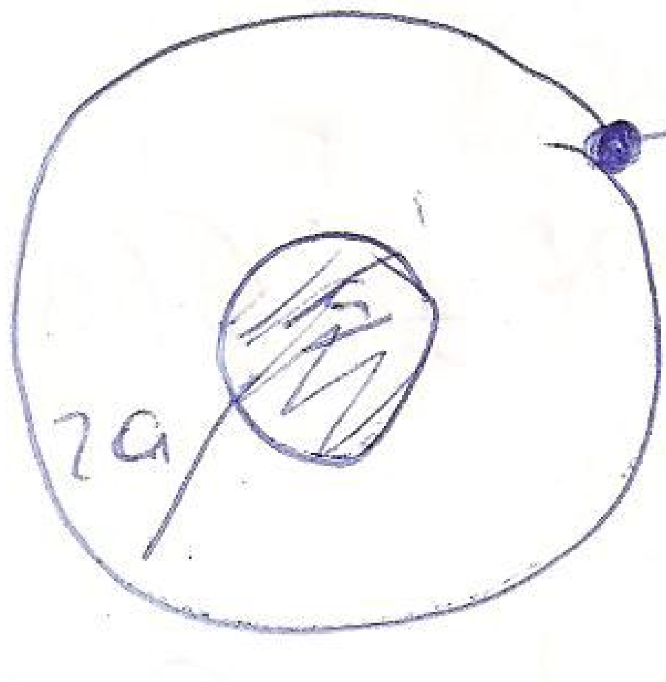
$$V(r) - V(a) = -\cancel{\int_a^r \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

$$V(r) = V(a) = 0$$

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{2}, & r < a \\ 0, & a < r < 2a \\ \dfrac{\rho_0 a^2}{2r}, & r > 2a \end{cases}$$

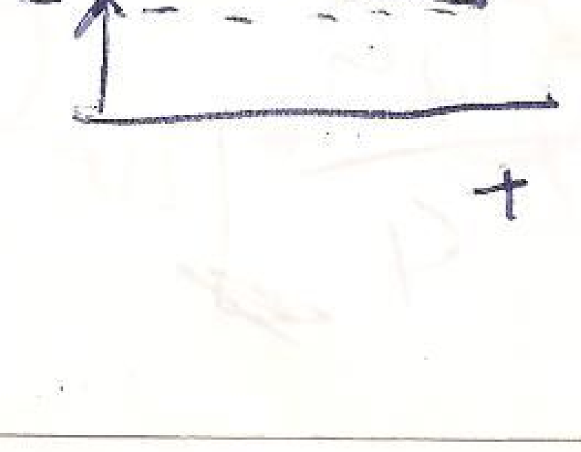
$$V(r) = \begin{cases} \quad , & r < a \\ 0, & a < r < 2a \\ \quad , & r > 2a \end{cases}$$

$a < r \geq 2a$



$$V(r) - \underbrace{\cancel{V(2a)}}_{0} = -\int_{2a}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$V(r) = -\int_{2a}$$



$$u = \frac{Q^2}{2C}$$

3. Dos placas conductoras paralelas (a y b), ambas de área $A = L^2$, están separadas por una distancia d ($d \ll L$). El sistema está aislado, con cargas iniciales $+Q$ y $-Q$, respectivamente en las placas. A continuación, se introduce una lámina conductora, de igual área y de espesor $\Delta = d/5$, a una distancia $c = 2d/5$ de la placa a y paralela a ambas.

   (a) Dibuje, sobre la Figura 2 (a la derecha), las cargas inducidas en las superficies de la lámina interna. Explique su diagrama. (*1pt.*)

   (b) Dibuje las líneas de campo eléctrico en ambas figuras e indique la magnitud del campo, en cada caso, en los espacios vacíos entre las placas. (*2pts.*)

   (c) Calcule las diferencias de potencial respectivas, V_{ab} (antes) y V'_{ab} (después), entre las placas externas. (*3pts.*)

   (d) Calcule las capacitancias respectivas, C (antes) y C' (después), y compárelas. (*3pts.*)

   (e) Calcule las energías totales almacenadas, U_e (antes) y U'_e (después), en los respectivos capacitores y compare. (*3pts.*)

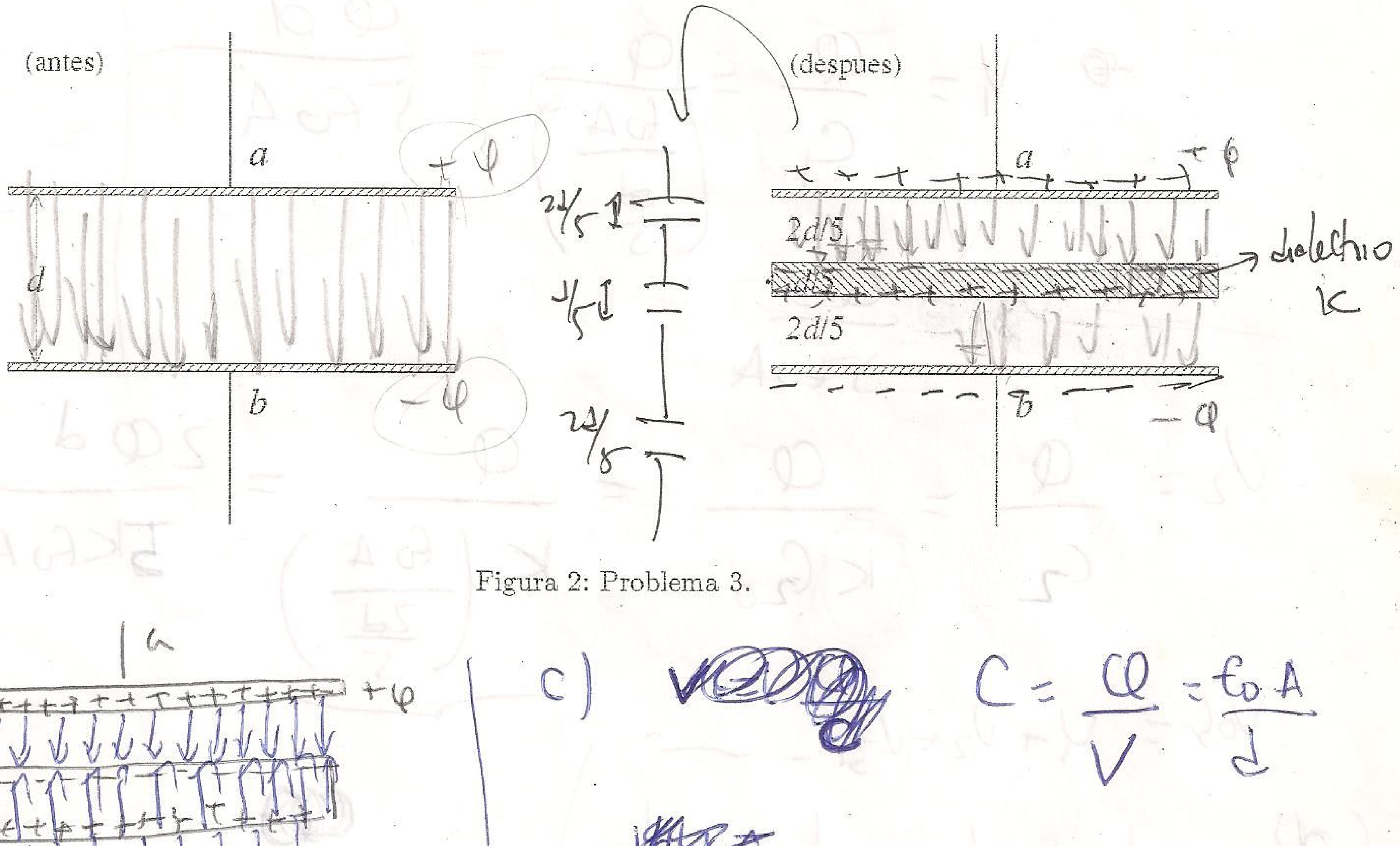
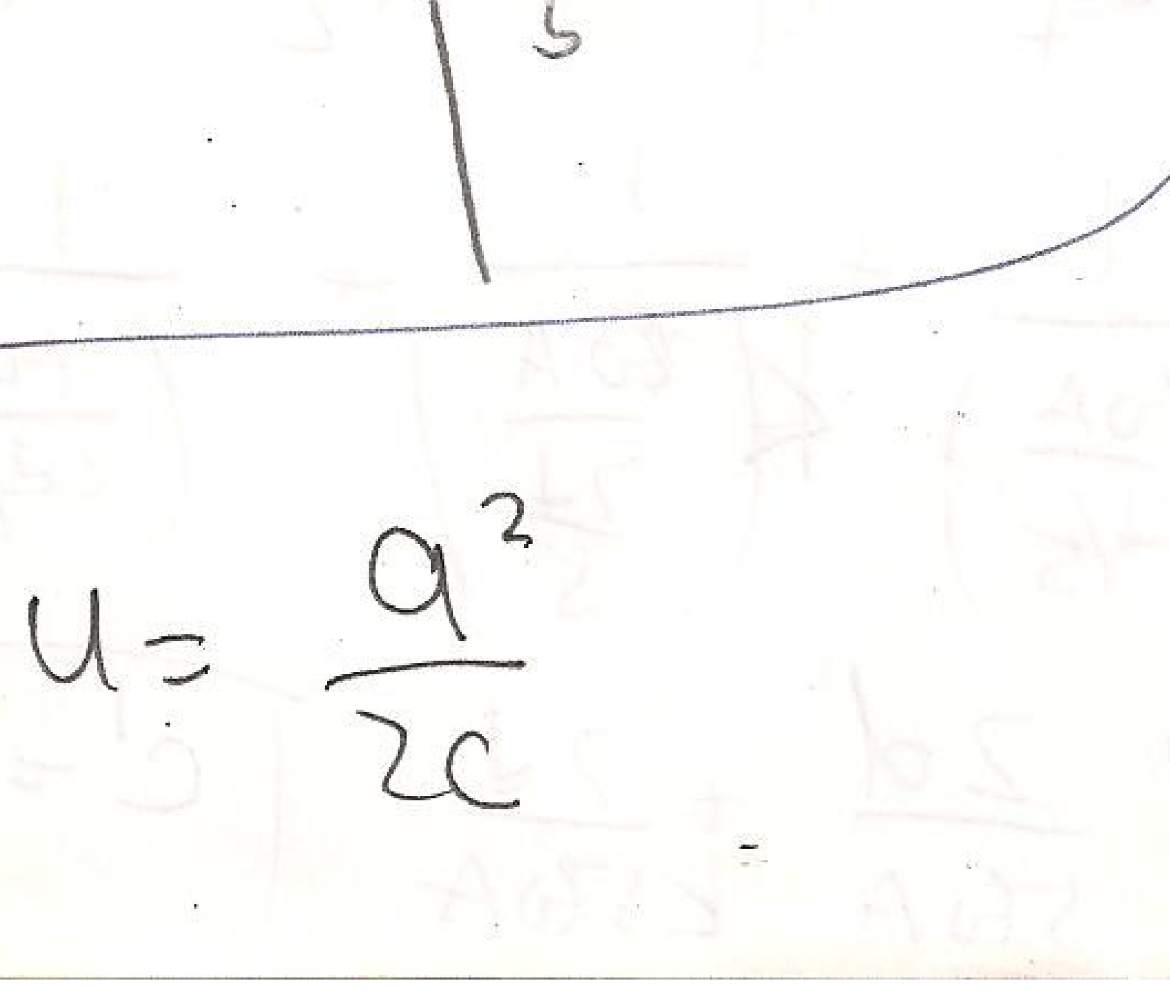


Figura 2: Problema 3.

(a)

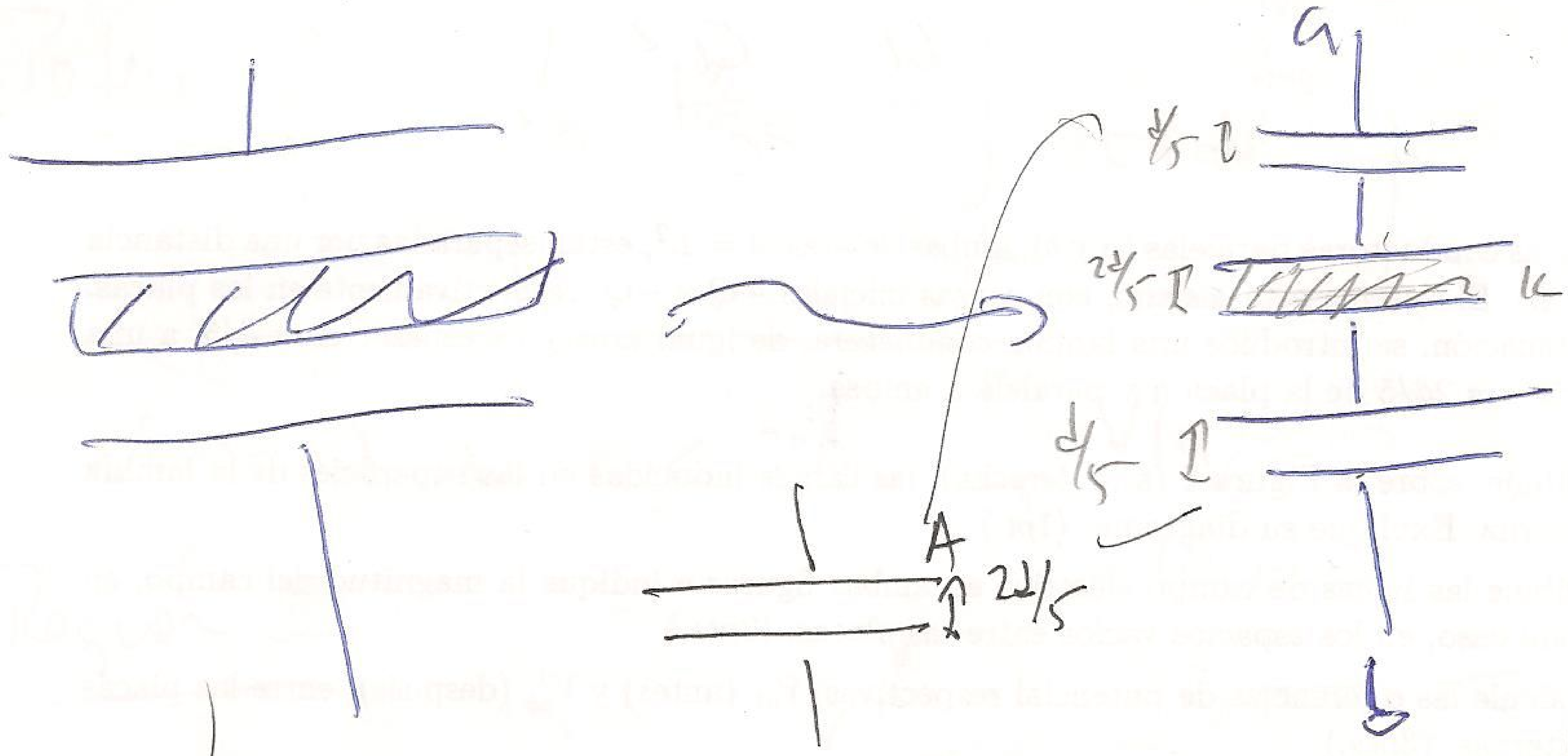
(b)



c) $C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$

$$\Rightarrow \boxed{V_{ab} = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\frac{\epsilon_0 A}{d}} = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}}$$

$$u = \frac{Q^2}{2C}$$



$$C' = \frac{Q}{V_{ab}}$$

$$V_{ab} = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{Q}{\left(\frac{\epsilon_0 A}{\frac{d}{5}}\right)} = \frac{Qd}{5\epsilon_0 A}$$

$$V_3 = \frac{Qd}{5\epsilon_0 A}$$

$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{K C_{20}} = \frac{Q}{K\left(\frac{\epsilon_0 A}{\frac{2d}{5}}\right)} = \frac{2Qd}{5K\epsilon_0 A}$$

$$V_{ab} = \frac{2}{5}\frac{Qd}{\epsilon_0 A} + \frac{2}{5}\frac{Qd}{K\epsilon_0 A} = \frac{2}{5}\frac{Qd}{\epsilon_0 A}\left(1+\frac{1}{K}\right)$$

$$V_{ab} = \frac{2}{5}(V_{ab})\left(1+\frac{1}{K}\right)$$

$$V_{ab} = V_1 + V_2 + V_3 \ldots$$

(d) $$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Antes

$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{\left(\frac{\epsilon_0 A}{2d/5}\right)} + \frac{1}{K\left(\frac{\epsilon_0 A}{\frac{2d}{5}}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{\epsilon_0 A}{2d/5}\right)}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{2d}{5\epsilon_0 A} + \frac{2d}{K5\epsilon_0 A}$$

$$C' = \frac{Q}{V_{ab}}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{2d}{5\epsilon_0 A}\left(1+\frac{1}{K}\right) = \frac{2d}{5\epsilon_0 A}\left(\frac{K+1}{K}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{5\epsilon_0 A}{2d}\left(\frac{K}{K+1}\right)}$$

e) $U_e = \frac{Q^2}{2C}$